1. Aufgabenblatt: Analysis 1

Lehrkräfteweiterbildung, 14 Q, Sommer 2025
Dozent: Hans-Joachim von Höhne

Aufgabe 1.1 Zeigen Sie, dass folgende Teilmenge von $\mathbb{R}$ mit der von $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ geerbten Addition und Multiplikation ein Körper ist.

$$K = \{ a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Q} \}$$

(Hinweis zu den multiplikativen Inversen: Die Gleichung $(a + b\sqrt{2}) \cdot (x + y\sqrt{2}) = 1$ führt durch Ausmultiplizieren und "Koeffizientenvergleich" auf ein Gleichungssystem in $\mathbb{Q}$; man kann aber auch anders vorgehen.)

Aufgabe 1.2 Sei $(K, +, \cdot, <)$ ein geordneter Körper. Zeigen Sie, dass für alle $a, b \in K$ folgende Aussagen gelten. Benennen Sie dabei in jedem Schritt die benutzten Ordungsaxiome.

1) $0 < a < b \implies 0 < b^{-1} < a^{-1}$

2) $a < b \implies a < \frac{a+b}{2} < b$ (dabei ist $2 = 1 + 1$)

Aufgabe 1.3 Zeigen Sie, dass für alle $x, y \in \mathbb{R}$ die *Umgekehrte Dreiecks-Ungleichung* gilt.

$$\left|\, |x| - |y| \,\right| \leq |x - y|$$

Aufgabe 1.4

1) Bestimmen Sie, für welche natürlichen Zahlen n folgende Ungleichung gilt.

$$n! > 2^n$$

2) Zeigen Sie mit vollständiger Induktion:

$$\forall\, n \geq 2 : \prod_{k=2}^{n} \left(1 - \frac{1}{k^2}\right) = \frac{n+1}{2n}$$